Нестандартные приемы решения уравнений.

(подборка задач)

Рассматриваемые далее уравнения решаются, в основном, на функциональном уровне, т. е. сопоставлением некоторых свойств функции, содержащихся в уравнении.

I. В школьном учебнике «Алгебра и начала анализа» сформулирована теорема (о корне):«Пусть функция f возрастает (или убывает) на промежутке J, число a – любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение f(x) = a имеет единственный корень в промежутке J».

Эту теорему можно сформулировать несколько иначе. Пусть функция f возрастает (или убывает) на промежутке J. Тогда уравнение f(x) = a может иметь не более одного корня.

Если в промежутке J существуют два таких значения аргумента x_1 и x_2, что $f(x_1) - a < 0$, а $f(x_2) - a > 0$, то уравнение f(x) = a имеет единственный корень.

Примеры:

1.*Решить уравнение:* $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} = 6$.

Решение. Область определения уравнения – луч $[-1; +\infty)$, и функция

$f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} - 6$ возрастающая (как сумма возрастающих функций), так что данное уравнение не может иметь более одного корня. Заметив, что $f(-1) - 6 < 0$, а $f(1) - 6 > 0$, делаем вывод, что данное уравнение имеет единственный корень, принадлежащий промежутку [-1;1]. Легко видеть, что x = 0.

2. *Решить уравнение*: $\cos\sqrt{2-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Пусть $y = \cos\sqrt{2-x^2}$.Ясно, что $0 \le y \le \sqrt{2}$, а при этих значениях y функция cos y убывает, и каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента. Итак, имеем систему

$$\begin{cases} \mathrm{Cos}\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 0 \le y \le \sqrt{2}. \end{cases}$$

Откуда $y = \frac{\pi}{6}$, и остается решить уравнение $\sqrt{2-x^2} = \frac{\pi}{6}$.

3. *Решить уравнение*: $\mathrm{ctg}\ x = e^{\mathrm{ctg}\ 2x}$ на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Прологарифмировав данное уравнение и обозначив ctg x = t, получим уравнение

$$2 \ln t = t - t^{-1},$$

$$t - \frac{1}{t} - 2 \ln t = 0.$$

f(t) = t - $\frac{1}{t}$ -2 ln t (t > 0). Так как f ` = 1+ $\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\frac{(t-1)^2}{t^2}\geq 0$, то функция f(t) возрастает на всей области определения, и поскольку f(1) = 0, то ctg x = 1 и x = $\frac{\pi}{4}$ - искомое решение.

1. *Показать*, что при любом значении a уравнение $\frac{(x-1)^5}{x^2+1}=a$ имеет единственный корень.

Решение. Пусть f(x) = $\frac{(x-1)^5}{x^2+1}$. Очевидно, что D(f) = R. Так как

$$f'(x) = \frac{5(x-1)^4(x^2+1)-2x(x-1)^5}{(x^2+1)^2}=\frac{(x-1)^4(3x^2+2x+5)}{(x^2+1)^2}\geq 0,$$

то f(x) возрастает на R. Заметив, что f(-1) < 0, а f(2) > 0, делаем вывод, что данное уравнение имеет единственный корень при любом а.

2. *Сколько* корней имеет уравнение

$$x - 3 = 2\cos\frac{x+3}{2}?$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$x - 3 - 2\cos\frac{x+3}{2} = 0.$$

Для функции f(x) = $x - 3 - 2\cos\frac{x+3}{2}$

f '(x) = $1 + \sin\frac{x+3}{2}\geq 0$ при любом $x\in R$. Следовательно, функция f(x) возрастает на R. Заметив, что f(0) < 0, f(6) > 0, делаем вывод, что уравнение имеет единственный корень.

6. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = x - y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Решение. Непрерывная функция f(x) = sin t – t убывает на R и поэтому каждое свое значение принимает только один раз. Из первого уравнения следует, что x = y.Значит, $(\frac{1}{\sqrt2};\ \frac{1}{\sqrt2}),(-\frac{1}{\sqrt2};\ -\frac{1}{\sqrt2})$ – искомые решения данной системы.

II. Пусть функция f(x) возрастает на промежутке J_1, а функция g(x) убывает на промежутке J_2. Тогда уравнение f(x) = g(x) не может иметь более одного корня.

Примеры:

1. *Решить уравнение* $\sqrt{x-1}=3-\frac{1}{4}x^3$.

Решение. Функция f(x) = $\sqrt{x-1}$ возрастает на луче [1; +∞).

Функция g(x) = 3 - $\frac{1}{4}x^3$ убывает на R. Значит, данное уравнение не имеет более одного корня. Легко видеть, что x = 2 – его корень.

2. *Решить уравнение* $4^x + 3^x = 7^x$.

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $4^x > 0$, получим

$$1 + \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{7}{4}\right)^x.$$

Теперь левая часть уравнения убывает на R, а правая часть, являющаяся показательной функцией $\left(\frac{7}{4}\right)^x$, возрастает на R. Уравнение не может иметь более одного корня. Легко видеть, что x = 1.

3. *Решить уравнение* $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$.

Решение. Область определения уравнения : x > 0. Положим $\log_3 x = t$. Тогда $x = 3^t$, и уравнение примет вид

$$2^t = 1 + (\sqrt{3})^t.$$

Разделив обе части на $(\sqrt{3})^t > 0$, получим $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^t = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t + 1$.

Левая часть уравнения представляет собой возрастающую функцию, а правая – убывающую. Значит, уравнение не может иметь более одного корня. Легко видеть, что t =2 и x = 9.

4. *Решить уравнение* $\sqrt{2(x-2)} + a\sqrt{x-4} = \sqrt{8-x}$ (a > 0).

Решение. Область определения данного уравнения – отрезок [4; 8]. При любом a $\geq$ 0 левая часть уравнения – возрастающая функция на луче [4; $+\infty$), а правая – убывающая на промежутке ($-\infty$; 8]. Следовательно, исходное уравнение не может иметь более о

дного корня. Как легко заметить, x = 4 – искомый корень.

III. Пусть дано уравнение f(x) = g(x) и известно, что, например, f(x) $\geq$ A, а g(x)$\leq$ A, где A- некоторое число из E(f). Ясно, что уравнение f(x) = g(x) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение система уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Примеры:

1.*Решить уравнение* $\cos(x - 1) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

Решение. Пусть x > 0, тогда $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1$, а $\cos(x - 1) \leq 1$. Следовательно, для нахождения корней уравнения (при x > 0) решим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1+x^2}{2x} = 1, \\ \cos(x - 1) = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения x = 1, и оно удовлетворяет второму уравнению.

При x < 0 имеем $\frac{1+x^2}{2x} \le -1.$ И так как cos(x – 1)≥ -1, то для нахождения x (x < 0) приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{1+x^2}{2x} = -1, \\ \cos(x-1) = -1. \end{cases}$$

Из первого уравнения x = -1, но оно не удовлетворяет второму уравнению системы.

Ответ: x = 1.

2. *Решить уравнение* $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = x^2 - 3x + 2{,}25 + \sqrt{2}.$

Решение. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции f(x) = $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$. Заметим, что D(f) = [1; 2] и

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x-1}}{2\sqrt{(x-1)(2-x)}};$$

f ‘(x) = 0 при x = 1,5 – критическая точка, принадлежащая интервалу (1; 2). Имеем далее, что f(1) = f(2) = 1; f(1,5) = $2\sqrt{0{,}5} = \sqrt{2}$.

Итак, область значений функции f(x) есть отрезок [1; $\sqrt{2}$], поскольку f(x) непрерывна на отрезке [1; 2].

Для правой части уравнения имеем оценку

$x^2 - 3x + 2{,}25 + \sqrt{2} = (x - 1{,}5)^2 + \sqrt{2} \ge \sqrt{2}$.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = \sqrt{2}, \\ x^2 - 3x + 2{,}25 + \sqrt{2} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Обоим уравнениям удовлетворяет x = 1,5.

Ответ: x=1,5.